

# **ELEMENTS D'ALGEBRE LINEAIRE,**

**A L'USAGE DES ETUDIANTS DE L'U.E. M1PY3W01**

## **FASCICULE D'EXERCICES**

*A partir de Septembre 2014, le programme de cette U.E. devient le programme d'Algèbre et application à la résolution de systèmes différentiels linéaires, tel qu'enseigné jusque là , en semestre 4.*

**Jean-Louis Artigue , le 3 Septembre 2014**

# Table des matières

	Page
<b><u>- LES BASES DE L'ALGEBRE LINEAIRE -</u></b>	
<b><u>-I- ESPACES VECTORIELS -</u></b>	..... 3
<b><u>- II - APPLICATONS LINEAIRES -</u></b>	..... 4
<b><u>- III - MATRICES -</u></b>	..... 5
<b><u>- IV - DETERMINANTS -</u></b>	..... 6
<b><u>- V – LA DIAGONALISATION D'UNE MATRICE DIAGONALISABLE -</u></b>	
<u>-1) Pratique de la diagonalisation -</u>	..... 7
<u>-2) Application à la résolution de systèmes différentiels linéaires -</u>	..... 8
<b><u>- ANNALES -</u></b>	..... 9
DS       2011	10
Session 1 2011	11
Session 2 2011	12
DS       2012	12
Session 1 2012	14
Session 2 2012	15
DS       2013	16
Session 1 2013	17
DS       2014	186
Session 1 2014	197
Session 2 2014	21

## - LES BASES DE L'ALGÈBRE LINÉAIRE -

### - I - ESPACES VECTORIELS -

#### - Exercice 1 - *Calculs élémentaires*

- 1) Dans  $\mathbb{R}^2$ , calculer  $2.(1, -3) - 5.(2, -1)$ .
- 2) Dans  $\mathbb{R}[X]$ , calculer  $-3.P(X) + 2.Q(X)$  pour  $P(X) = X-1$  et  $Q(X) = X^2 + X + 1$ .
- 3) Dans  $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ , calculer  $-5.f + 7.g$  pour  $f = [x \rightarrow x^2 - 1]$  et  $g = [x \rightarrow 2x^2 - 3]$ .

#### - Exercice 2 - Pour chacun des ensembles $F$ suivants, donner un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ tel que $F \subset E$ .

$(F, +, \cdot)$  est-il sous-espace vectoriel de  $(E, +, \cdot)$  ?

Si oui, donner une forme générale de ses éléments et une famille génératrice de  $F$  s'il en existe.

- 1)  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 1\}$ .
- 2)  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$ .
- 3)  $F = \{(\alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha) / (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ .
- 4)  $F = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 / z_2 = \bar{z}_1\}$ .

#### - Exercice 3 - On considère les sous-espaces vectoriels $(F, +, \cdot)$ et $(G, +, \cdot)$ de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ définis par :

$$F = \text{Vect}(\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}) \text{ et } G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$$

- 1) Donner la forme générale des vecteurs de  $F$  et des vecteurs de  $G$ .
- 2) Donner une propriété caractéristique des vecteurs de  $F$  et une qui caractérise les vecteurs de  $G$ .
- 3) Déterminer les éléments de  $F \cap G$ . Que dire de  $(F \cap G, +, \cdot)$  ?

#### - Exercice 4 - On considère les sous-espaces vectoriels $(F, +, \cdot)$ et $(G, +, \cdot)$ de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ définis par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = z = 0\} \text{ et } G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\}$$

Démontrer qu'ils sont supplémentaires.

#### - Exercice 5 - Dans chacun des cas suivants examiner si la famille constituée dans l'ordre des vecteurs de $E$ proposés est libre ou génératrice de $E$ . Est-elle une base de $(E, +, \cdot)$ ?

- 1)  $(1, 1, 0)$  et  $(0, 1, 1)$  pour  $E = \mathbb{R}^3$ .
- 2)  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$  et  $(0, 1, 1)$  pour  $E = \mathbb{R}^3$ .
- 3)  $(-6, 2)$  et  $(9, -3)$  pour  $E = \mathbb{R}^2$ .
- 4)  $(-1, 1, 0)$ ,  $(0, -2, 2)$  et  $(a, b, c)$  pour  $E = \mathbb{R}^3$ .

On répondra par une discussion suivant les valeurs des paramètres réels  $a, b$  et  $c$ .

#### - Exercice 6 - On considère l'espace vectoriel $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)$ des polynômes de degré $\leq 2$ à coefficients réels.

- 1) Donner sa base canonique et sa dimension.
- 2)  $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / X.P' = P\}$  ( $P'$  est le polynôme dérivé de  $P$  pour la dérivation classique).
  - a- Montrer que  $(F, +, \cdot)$  est un sous-espace vectoriel de  $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)$ .
  - b-  $F$  est-il égal à  $\mathbb{R}_2[X]$  ? (justifier)
  - c- Quelle est la forme générale des éléments de  $F$  ?
  - d- Donner une base et la dimension de  $(F, +, \cdot)$ .

- Exercice 7 -

-1) Montrer que les trois applications  $u = [x \rightarrow 1]$ ,  $v = [x \rightarrow \sin(4x)]$  et  $w = [x \rightarrow \cos(4x)]$  constituent une famille libre dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ .

-2) Montrer que les applications  $f = [x \rightarrow \sin^2(2x)]$  et  $g = [x \rightarrow \sin(2x)\cos(2x)]$  sont éléments de  $\mathcal{Vect}(\{u, v, w\})$ .

**- II - APPLICATIONS LINEAIRES -**

- Exercice 1 - Pour chacune des applications proposées, est-elle ou non linéaire ? Justifier la réponse.

-1)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$   
 $(x, y) \rightarrow (2x, 0, x - y)$

-2)  $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  (On distinguera les deux cas des structures de  $\mathbb{R}$ -e.v. et de  $\mathbb{C}$ -e.v.)  
 $(z, u) \rightarrow (\bar{u}, \bar{z})$

- Exercice 2 - Pour chacune des applications linéaires suivantes, déterminer son noyau et son image.

-1)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  .. -2)  $f: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$   
 $(x, y, z) \rightarrow (x - y, y - z)$   $P \rightarrow P' - P$

- Exercice 3 -  $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1,2,3}$  étant la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ , on considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$ , défini par  $f(e_1) = 13e_1 + 12e_2 + 6e_3$ ,  $f(e_2) = -8e_1 - 7e_2 - 4e_3$  et  $f(e_3) = -12e_1 - 12e_2 - 5e_3$ .

Démontrer que  $F = \{u \in \mathbb{R}^3 / f(u) = u\}$  et  $G = \{u \in \mathbb{R}^3 / f(u) = -u\}$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$  en considérant deux applications linéaires.

Déterminer les dimensions de  $F$  et de  $G$ .

- Exercice 4 -  $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1,2,3,4}$  étant la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ , on considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^4$ , défini par  $f(e_1) = -e_2 + e_3 - e_4$ ,  $f(e_2) = e_1 - e_2 + e_3$  et  $f(e_3) = e_1 + e_4$  et  $f(e_4) = e_2 - e_3 + e_4$ .

-1) Déterminer  $f^2$ . Qu'en déduire concernant la position relative de  $\text{Im}(f)$  et  $\text{Ker}(f)$  ?

-2) Déterminer  $\text{Ker}(f)$ . En déduire  $\text{Im}(f)$ .

- Exercice 5 -  $(E, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -e.v.,  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f^2 = f$ .

-1) Démontrer que  $g = \text{Id}_E - f$  vérifie  $g^2 = g$ .

-2) Démontrer que  $\text{Ker}(g) = \text{Im}(f) = \{u \in E / f(u) = u\}$ .

-3) Démontrer que  $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$  et retrouver ainsi le fait que  $f$  est un projecteur de  $E$ .

### - III - MATRICES -

- Exercice 1 - On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  et on définit  $B = A^2 - 5A + 6I_3$ .

-1) Calculer  $B$  puis  $AB$ .

-2) En déduire que  $A$  n'est pas inversible.

-3) Pour  $n = 3, 4, 5, 6$  exprimer  $A^n$  en fonction de  $I_3, A$  et  $A^2$ .

- Exercice 2 -  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

-1) Calculer les réels  $a$  et  $b$  de sorte que  $A \times D = D \times A$ .

( $a$  et  $b$  conservent ces valeurs dans la suite de l'exercice).

-2) On pose  $N = A - D$ . Calculer  $N^2$ .

-3) Calculer  $A^n$  pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

-4)  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux suites réelles telles que  $v_0 = 1 = w_0$

et  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 2v_n + w_n$  et  $w_{n+1} = 2w_n$ .

En s'aidant d'une suite constante  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , exprimer  $v_n$  et  $w_n$  en fonction de  $n$ .

- Exercice 3 -  $\mathcal{B}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\varphi$  est l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ , de matrice  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

-1) Déterminer  $\text{Ker}(\varphi)$ . En donner base et dimension.

-2) Déterminer  $\text{Im}(\varphi)$ . En donner base et dimension.

-3)  $\forall n \in \mathbb{N}$ , déterminer la matrice  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi^n)$ .

- Exercice 4 - On considère dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ , la base canonique  $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1,2,3}$  et la base  $\mathcal{B}' = (\varepsilon_i)_{i=1,2,3}$  où  $\varepsilon_1 = (1, 1, 0)$ ,  $\varepsilon_2 = (1, 0, 1)$ ,  $\varepsilon_3 = (0, 1, 1)$ .

$\varphi$  est l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par  $\varphi((x, y, z)) = (x - 3y + 3z, 2x - 4y - 2z, 5x - 5y - z)$

-1) Construire les matrices de  $\varphi$  relativement à la base  $\mathcal{B}$  puis relativement à  $\mathcal{B}'$ .

-2) Quelles sont les coordonnées d'un vecteur quelconque  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  par rapport à  $\mathcal{B}'$  ?

En utilisant  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$  en déduire les coordonnées de  $\varphi((x, y, z))$  par rapport à  $\mathcal{B}'$ .

Retrouver à partir de ces coordonnées l'expression de  $\varphi((x, y, z))$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

- Exercice 5- Dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ , on note  $u_1 = [x \rightarrow e^x]$ ,  $u_2 = [x \rightarrow e^{-x}]$  et  $E = \mathcal{Vect}(\{u_1, u_2\})$ .

-1) Montrer que  $\mathcal{B} = (u_i)_{i=1,2}$  est une base de  $E$ .

-2) On note  $v_1 = \text{ch}$  et  $v_2 = \text{sh}$ . Montrer que  $\mathcal{B}' = (v_i)_{i=1,2}$  est également une base de  $E$ .

-3) Ecrire la matrice  $P$  de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  et calculer la matrice de passage de  $\mathcal{B}'$  à  $\mathcal{B}$ .

-4) Calculer les coordonnées de  $f = [x \rightarrow 3.e^x - 5.e^{-x}]$  par rapport à  $\mathcal{B}$ .

- Exercice 6 -  $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1,2,3}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

-1) Calculer  $P^3 - 4P^2 + P$ . En déduire que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ .

-2) On pose  $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\varepsilon_2 = (1, 0, 0)$ ,  $\varepsilon_3 = (1, 2, 3)$  et on note  $\mathcal{B}' = (\varepsilon_i)_{i=1,2,3}$ .

Montrer que  $\mathcal{B}'$  est base de  $\mathbb{R}^3$ ; écrire les matrices de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  et de  $\mathcal{B}'$  à  $\mathcal{B}$ .

-3)  $\varphi$  est l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  de matrice  $\begin{pmatrix} m & 4-3m & 2m-3 \\ 0 & 5-2m & -4+2m \\ 0 & 6-3m & -5+3m \end{pmatrix}$  relativement à  $\mathcal{B}$ .

Calculer sa matrice relativement à  $\mathcal{B}'$ .

-4) Suivant la valeur du paramètre réel  $m$ , discuter le rang de  $\varphi$ .

#### - IV - DETERMINANTS -

- Exercice 1 - Calculer chacun des déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & k \end{vmatrix}$$

- Exercice 2 - Pour quelles valeurs du paramètre  $m$  les vecteurs  $(1, 1, 1)$ ,  $(2, m, 3)$ ,  $(4, m^2, 9)$  forment-ils une base de  $\mathbb{R}^3$  ?

- Exercice 3 - -1) Pour quelles valeurs du paramètre réel  $m$  la matrice  $A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$  est-elle inversible ?

-2) On considère le cas où  $m = -1$ . Calculer l'inverse de  $A_{-1}$  de trois manières différentes :

-a- En utilisant la formule avec la comatrice (ou matrice des cofacteurs).

-b- En utilisant les opérations élémentaires sur les lignes.

-c- En vérifiant que le polynôme  $P(x) = \det(A_{-1} - x.I_3)$  est annulateur de  $A_{-1}$  puis en obtenant  $I_3$  comme produit de  $A_{-1}$  par une somme de matrices qui sera  $(A_{-1})^{-1}$ .

-3) Résoudre le système  $\begin{cases} -x + y + z = 4 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$  en utilisant son interprétation matricielle.

- Exercice 4 - On considère le déterminant :  $D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2^2 & 5 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 3^2 & 7 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n^2 & 2n+1 \end{vmatrix}$ .

-1) Montrer que pour tout entier  $n \geq 3$ , on a  $D_n = (2n+1)D_{n-1} - n^2D_{n-2}$ .

- 2) Pour tout  $n \geq 2$  on pose  $u_n = D_n - (n+1) D_{n-1}$ . Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- 3) Pour  $n \geq 1$ , on pose  $v_n = \frac{D_n}{(n+1)!}$ . Exprimer  $v_n$  puis  $D_n$  en fonction de  $n$ .

## - V - LA DIAGONALISATION D'UNE MATRICE DIAGONALISABLE -

### -1) Pratique de la diagonalisation -

- Rappels : Une polynôme est "**scindé**" s'il peut se factoriser entièrement en produit de polynômes du premier degré.  
Systématiquement vérifiée dans  $\mathbb{C}[x]$ , cette propriété peut ne pas l'être dans  $\mathbb{R}[x]$   
(exemple :  $(x+1)(x^2+1)$ ).

Une matrice  $M$  de type  $n \times n$  est **diagonalisable** lorsque la famille formée par recollement des bases de ses différents sous-espaces propres est une base de  $\mathbb{K}^n$ .

Ce phénomène se réalise pour les matrices qui vérifient simultanément les deux propriétés suivantes:

- 1] le polynôme caractéristique de  $M$ :  $P_M(x) = \det(M - xI_n)$  est scindé.
- 2] pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $M$ , la dimension du sous-e.v. propre associé  $E_\lambda = \text{Ker}(M - \lambda I_n)$  est égale (usuellement  $\leq$ ) à l'ordre de multiplicité de  $\lambda$  comme racine de  $P_M(x)$ .

C'est en particulier toujours le cas si le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

- Exercice 1 -  $\mathcal{B}$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . On considère la matrice  $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

- 1) Calculer son polynôme caractéristique. En déduire ses valeurs propres.  
Pourquoi est-il certain que  $M$  est diagonalisable? Est-elle inversible?
- 2) Déterminer chacun des sous-espaces propres.  
Proposer une base  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{R}^3$  formée de vecteurs propres.
- 3) Ecrire la matrice  $P = \mathcal{M}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$  puis calculer  $P^{-1} = \mathcal{M}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ .  
En déduire une expression de  $M$  en fonction de  $P$ ,  $P^{-1}$  et d'une matrice diagonale  $\Delta$ .
- 4) Pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}$ , exprimer  $\Delta^n$  puis  $M^n$  en fonction de  $n$ .

- Exercice 2 - Même exercice mais avec  $M = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 8 \\ 3 & -6 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ .

- Exercice 3 - Suivant la valeur du paramètre réel  $m$ , discuter la diagonalisabilité de  $M_m = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$ .

- Exercice 4 - -1) On considère une matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$  dont les sommes des coefficients de chaque ligne sont égales :  $a+b+c = d+e+f = g+h+i = S$ .

-a- Quel rôle le vecteur  $(1, 1, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$  joue-t-il pour  $A$ ? Quel rôle le réel  $S$  joue-t-il pour  $A$ ?

-b- On suppose  $A$  semblable à une matrice diagonale :  $A = P \times \Delta \times P^{-1}$  où  $\Delta = \text{diag}(\lambda, \mu, \nu)$ .  
Pourquoi  $A$  et  $\Delta$  ont-elles même polynôme caractéristique?

On observe que le polynôme caractéristique d'une matrice  $M$  de type  $n \times n$  est de la forme  $P_M(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(M) x^{n-1} + \dots + \det(M)$  où  $\text{tr}(M)$  est la "trace de  $M$ " c'est à dire la somme des termes de sa diagonale principale descendante .

En déduire en fonction des coefficients de la matrice  $A$  les expressions de la somme et du produit de ses valeurs propres (comptées autant de fois que leur ordre de multiplicité).

-2) Pourquoi la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  est-elle sûrement diagonalisable ?

Sans calcul de son polynôme caractéristique et en considérant seulement son rang et sa trace, déterminer ses valeurs propres .

-3) Diagonaliser  $A$  .

## -2) Application à la résolution de systèmes différentiels linéaires -

- Exercice 1 - Système du type  $X'(t) = A \times X(t) + B(t)$  où  $A$  est diagonalisable.

$x_1, x_2, x_3$  sont trois applications de variable  $t$  et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + 3x_2(t) + 3x_3(t) + t^2 \\ x_2'(t) = 2x_1(t) - x_2(t) - 2x_3(t) + t \\ x_3'(t) = -2x_1(t) + 3x_2(t) + 4x_3(t) + 1 \end{cases}$$

Déterminer ces applications sachant que  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (1, 0, -1)$

- Exercice 2 - Système du type  $X'(t) = A \times X(t) + B(t)$  où  $A$  est diagonalisable.

$x, y, z$  sont trois applications de variable  $t$  et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x' = 2x - y + z + t \\ y' = x + y + 2z \\ z' = x + 3z \end{cases}$$

Déterminer la solution générale de ce système différentiel.

- Exercice 3 - Equation différentielle linéaire à coefficients constants .

On considère l'équation différentielle  $y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = 24e^{3t}$  notée (E) .

On souhaite déterminer l'ensemble des fonctions de variable  $t$ , de classe  $C^3$  sur  $\mathbb{R}$  qui la vérifient.

-1) Ecrire le système différentiel linéaire associé à cette équation en posant  $x_1(t) = y(t)$ ,  $x_2(t) = y'(t)$ ,  $x_3(t) = y^{(2)}(t)$ .

-2) Résoudre ce système et en déduire les solutions de (E) .

- Exercice 4 - Système du type  $X''(t) = A \times X(t) + B(t)$  .

Pour  $m$  paramètre réel positif, résoudre le système différentiel  $\begin{cases} x'' = -2m^2 y + 1 \\ y'' = 2m^2 x \end{cases}$

en se ramenant à un système de deux équations différentielles du second ordre, indépendantes.

- Exercice 5 - Système du type  $X''(t) = A \times X(t) + B(t)$  .

Déterminer la solution du système

$$\text{différentiel } \begin{cases} x'' = -x + y + z \\ y'' = x - y + z \\ z'' = x + y - z \end{cases} \quad \text{telle que } \begin{cases} x(0) = 0, x'(0) = 1 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \\ x, y \text{ et } z \text{ sont bornées} \end{cases}$$



# ANNALES

Exercice 1 :

$$\text{Soit } f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \longrightarrow (x + z, y)$$

- 1) Prouver que  $f$  est une application linéaire.
- 2) Déterminer son noyau. En donner une base et sa dimension.
- 3) Déterminer son image. En donner une base et sa dimension.

Exercice 2 : Pour quelles valeurs du paramètre réel  $m$ , les vecteurs  $(1, 1, 1)$ ,  $(2, m, 3)$ ,  $(4, m^2, 9)$  forment-ils une base de  $\mathbb{R}^3$  ?

Exercice 3 :  $\mathcal{B}$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

$$\text{On considère la matrice } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

-1) Calculer son polynôme caractéristique. En déduire ses valeurs propres. Pourquoi est-il certain que  $A$  est diagonalisable ? Est-elle inversible ?

-2) Déterminer chacun des sous-espaces propres. Proposer une base  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{R}^3$  formée de vecteurs propres (on ne démontrera pas que c'est une base de  $\mathbb{R}^3$ ). On choisira des vecteurs dont la première coordonnée par rapport à  $\mathcal{B}$  est 1. Ils seront ordonnés dans l'ordre croissant des valeurs propres correspondantes.

-3) Ecrire la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$   $P = \mathcal{M}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$  puis calculer son inverse  $P^{-1} = \mathcal{M}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ . En déduire une expression de  $A$  en fonction de  $P$ ,  $P^{-1}$  et d'une matrice diagonale  $\Delta$ .

-4)  $x_1, x_2, x_3$  sont trois applications de variable  $t$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  telles que

$$\forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x_1'(t) &= 2x_1(t) + 3x_3(t) + 3t + 3 \\ x_2'(t) &= 2x_1(t) + x_2(t) + 2x_3(t) + 6t + 6 \\ x_3'(t) &= 4x_1(t) - 2x_2(t) + 3x_3(t) \end{cases}$$

Déterminer ces applications sachant que  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (3/4, 3/2, 0)$ .

I (80/200)  $a \in \mathbb{R}^*_+$ .  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ . On note  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$  l'identité ( $u \rightarrow u$ ) de  $\mathbb{R}^3$ .

-1) Calculer  $\det(A)$ . A est-elle inversible ?

-2) Calculer  $A^2 - 2I_3$ .

On rappelle que si une matrice admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, elle est diagonalisable. Est-ce le cas de A ?

-3) -a- B est la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . On note  $\varphi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à A.

Quelle est la matrice de  $\varphi + 1.\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$  par rapport à la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  ?

Déterminer le noyau de  $\varphi + 1.\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ .

En donner une base formée de vecteurs dont la 3<sup>ème</sup> coordonnée est 1. Quelle est la dimension de ce noyau ?

-b- En déduire une valeur propre de A. Quelles sont les valeurs possibles de son ordre de multiplicité, en tant que racine du polynôme caractéristique de A (polynôme non calculé).

-c- Quelle est la somme des valeurs propres de A (chacune comptée autant de fois que son ordre de multiplicité) ?

En déduire le spectre de A en précisant l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre.

-d- Calculer l'image par  $\varphi$  du vecteur  $(a^2, a, 1)$ . En déduire un autre sous-espace propre de A.

-4) -a- On note  $P = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & -a & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Pourquoi est-elle inversible ?

Exprimer une relation liant A, P,  $P^{-1}$  et une matrice diagonale qu'on explicitera.

-b- On considère le cas particulier où  $a = -1$ . Calculer la matrice  $P^{-1}$ .

-5) On considère le système différentiel 
$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + x_3 + 2t \\ x_2' = -x_1 - x_3 + 2e^t - 2t \\ x_3' = x_1 - x_2 + 2e^t + 2t \end{cases}$$
.

-a- En les adaptant au cas particulier rencontré, utiliser les résultats précédents pour résoudre ce système.

-b- Déterminer la solution particulière telle que  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (-1, 2, 3)$ .

**Exercice 1 :**

On définit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 10 & -6 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les deux vecteurs  $\xi_1 = (-4, -1, 1)$  et  $\xi_2 = (10, 1, -7)$  forment une famille libre de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Calculer le noyau de l'application linéaire  $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  canoniquement associée à la matrice  $A$ . La matrice  $A$  est-elle inversible ?
3. Dédurre des deux questions précédentes que l'image de  $\phi$  est égale à  $\text{Vect}(\{\xi_1, \xi_2\})$ .
4. Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ . En déduire le spectre de  $A$ .
5. Trouver une base  $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$  de vecteurs propres de  $A$  telle que les valeurs propres correspondantes soient rangées par ordre croissant, et telle que le dernier coefficient de chaque vecteur soit égal à 1. Expliciter la matrice de passage  $P$  de la base canonique vers la base  $\mathcal{B}'$ .
6. Diagonaliser  $A$ , autrement dit, exprimer la matrice  $A$  en fonction de  $P$  et d'une matrice diagonale que l'on précisera (on ne calculera pas  $P^{-1}$ ).

**Exercice 2 :**

Cet exercice est indépendant de l'exercice 1. On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ -6 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On définit le système d'équations différentielles suivant :

$$(E) : \begin{cases} x_1'(t) &= -3x_1(t) + 2x_2(t) + 1x_3(t) \\ x_2'(t) &= -4x_1(t) + 3x_2(t) + 2x_3(t) + 2e^{2t} \\ x_3'(t) &= -6x_1(t) + 3x_2(t) + 2x_3(t) \end{cases}$$

1. Vérifier que  $P$  est inversible et calculer son inverse. On admet qu'on a  $A = P\Delta P^{-1}$ .
2. Résoudre le système (E).
3. Déterminer la solution particulière telle que  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (1, 1, 1)$ .

**Exercice 1.**

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer  $AB + A$ .
- 2) En réécrivant cette égalité, déduire que  $A$  est inversible et donner la matrice  $A^{-1}$ .
- 3) Utiliser le résultat de la question 2 pour donner, sans presque aucun calcul complémentaire, l'ensemble des solutions  $(x, y, z)$  du système

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -x + y + 2z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

**Exercice 2.**

Soit  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie, pour  $(x, y, z)$  dans  $\mathbb{R}^3$  par

$$f(x, y, z) = (3x - 2y + 2z, x - y + 3z).$$

- 1)a) Calculer  $f(1, 1, 0)$  et  $f(0, 1, 1)$ .
- b) Justifier le fait que  $Im(f) = \mathbb{R}^2$ .
- c) Quelle est la dimension du noyau de  $f$  ?
- d) Déterminer une base de  $Ker(f)$ .
- 2) a) Montrer que  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (4, 7, 1)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Utiliser la question 1 pour donner la matrice de  $f$  par rapport aux bases de départ  $\mathcal{B}$  et d'arrivée  $\mathcal{C}_2$ , où  $\mathcal{C}_2$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 3.**

Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $F$  le sous-ensemble de  $E$  défini par

$$F = \{f \in E / f(1) = 0\}$$

c'est-à-dire l'ensemble des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui sont nulles en 1.

Soit  $g$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie pour tout  $x$  réel par  $g(x) = x^2$ , et soit  $G$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par cet élément  $g$  de  $E$ .

- 1) Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- 2) Quelle est la forme générale des éléments de  $G$  ?
- 3) Déterminer  $F \cap G$ .
- 4) Montrer que les sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ . (Indication : on pourra remarquer que si  $f$  est une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $f = (f - f(1)g) + f(1)g$ .)

Les deux parties sont indépendantes.

**-I-** -1) -a- Calculer  $P^3 - 3.P^2 + 2.P$  pour  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

-b- En déduire que  $P$  est inversible et calculer son inverse  $P^{-1}$ .

-c- Calculer la matrice  $A = P \times D \times P^{-1}$  où  $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

Bien que cela ne soit pas indispensable pour répondre à la question suivante, les étudiants qui le jugeraient utile pourront admettre que les vecteurs-colonnes de la matrice  $P$  définissent une base de vecteurs propres de  $A$ , respectivement associés aux termes diagonaux de  $D$ , valeurs propres de  $A$ .

-2)  $x_1, x_2$  et  $x_3$  étant trois fonctions de variable  $t$ , dérivables sur  $\mathbb{R}$ , on considère le système différentiel :

$$\begin{cases} x_1' = -3.x_1 + 4.x_2 + 1.x_3 + e^t + t \\ x_2' = -1.x_1 + 2.x_2 + 1.x_3 + e^t + t \\ x_3' = -4.x_1 + 4.x_2 + 2.x_3 + e^t \end{cases}$$

-a- Ecrire ce système sous forme matricielle.

-b- Résoudre le système par la méthode de son choix.

-c- Déterminer la solution telle que  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (-1, -2, 0)$ .

**-II-** On considère la matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

-1) -a- Calculer son polynôme caractéristique.

-b- En déduire ses valeurs propres et leur ordre de multiplicité.

-c- Déterminer chacun des sous-espaces propres en donnant pour chacun d'eux une base et sa dimension.

-2) -a- Pourquoi la matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?

-b- Construire une matrice inversible  $P$  et une matrice diagonale  $\Delta$  (présentant les valeurs propres de  $M$  dans l'ordre croissant de gauche à droite) telles que  $\Delta = P^{-1} \times M \times P$ .

Premier exercice :

[100 points]

Résoudre le système différentiel du premier ordre à coefficients constants non homogène

$$X' = A X + B, \text{ où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -7 & 28 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } B \text{ vaut :}$$

a)  $e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$

[30 points]

b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

[50 points]

c)  $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$

[20 points]

Deuxième exercice :

[100 points]

Chacune des questions qui vont suivre nécessite une réflexion et un calcul fort simples .

L'ensemble de la solution , quant à lui , ne prend pas dix lignes .

On s'intéresse quelques instants donc au système différentiel (S)

$$X' = A X + e^{\alpha t} u, \text{ où}$$

$X$  est un vecteur-colonne  $3 \times 1$ ,  $A$  une matrice constante  $3 \times 3$  diagonalisable réelle ,  
 $\alpha$  est un réel fixé et  $u$  un vecteur-colonne  $3 \times 1$  fixé , réel et non nul .

1. Montrer que  $A - \alpha I$  est diagonalisable .

[10 points]

2. On note encore  $A$  l'endomorphisme de  $\mathbf{R}^3$  de matrice  $A$  dans la base canonique .Montrer que  $\text{im}(A)$  et  $\text{ker}(A)$  sont supplémentaires .

[10 points]

Montrer que  $\text{im}(A - \alpha I)$  et  $\text{ker}(A - \alpha I)$  sont supplémentaires .

[10 points]

( Introduire les valeurs et vecteurs propres de  $A$  )3. On suppose ici que  $\alpha \notin \text{sp}(A)$  .Trouver  $\dim(\text{im}(A - \alpha I))$  .

[10 points]

Donner l'unique solution particulière de (S) ayant la forme  $e^{\alpha t} v$ ,  $v$  constant .

[10 points]

4. On suppose ici que  $\alpha \in \text{sp}(A)$  .

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution particulière de (S)

ayant la forme  $e^{\alpha t} v$ ,  $v$  constant .

[10 points]

a) Si cette condition est respectée , trouver une solution particulière de (S) ayant la forme  $e^{\alpha t} v$ ,  
 $v$  constant .

[10 points]

b) Sinon , montrer qu'il existe toujours une solution particulière de (S) ayant la forme

 $e^{\alpha t} (t v + w)$ ,  $v$  et  $w$  constants .

[30 points]

DS DU 23 MARS 2013

**Exercice 1.** Dans cet exercice,  $E$  désigne le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes de degré au plus égal à 2. On note  $P_1, P_2, P_3$  les polynômes définis par

$$P_1(X) = X(X - 2) \quad P_2(X) = (X - 1)(X - 2) \quad P_3(X) = X(X - 1)$$

1) Soit  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  trois nombres réels, et  $P$  le polynôme défini par  $P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$ . Calculer  $P(0), P(1)$  et  $P(2)$  en fonction de  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ . *Il est fortement conseillé d'utiliser ce résultat pour répondre aux questions 2 et 4.*

2) Montrer que  $\{P_1, P_2, P_3\}$  est une famille libre de  $E$ .

3) Justifier que  $\{P_1, P_2, P_3\}$  est une base de  $E$ .

4) On pose  $P(X) = X^2 - 7$ . Déterminer les coordonnées de  $P$  dans la base  $\{P_1, P_2, P_3\}$ .

**Exercice 2.**

1) On pose  $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

a) Calculer le produit  $PQ$ .

b) En déduire que  $P$  est inversible et donner la matrice  $P^{-1}$ .

2) On pose  $v_1 = (-1, 1, 0), v_2 = (0, -1, 1), v_3 = (1, 1, 1)$ , et  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ .

Justifier sans calcul que  $\mathcal{B}$  est une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ .

3) On considère l'application linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  telle que

$$f(v_1) = v_1 \quad f(v_2) = v_2 \quad f(v_3) = (0, 0, 0)$$

a) Donner une base de l'image de  $f$  et une base du noyau de  $f$ .

b) Donner la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On la notera  $B$ .

c) Exprimer la matrice de  $f$  dans la base canonique à l'aide des matrices définies précédemment. *On ne demande pas d'en calculer les coefficients.*

**Exercice 3.** On pose  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

1) a) Calculer  $B^2$  et  $B^3$ .

b) Exprimer  $M$  à l'aide des matrices  $I_3, B$ , où  $I_3$  désigne la matrice identité de taille 3.

c) Utiliser la formule du binôme pour exprimer  $M^5$  à l'aide des matrices  $I_3, B$  et  $B^2$ .

d) Expliciter cette matrice  $M^5$ .

2) Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  trois suites de nombres réels telles que

$$u_0 = 1 \quad v_0 = 0 \quad w_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n \\ w_{n+1} = v_n + 3w_n \end{cases}$$

a) En notant  $X_n$  le vecteur colonnes de composantes  $u_n, v_n$  et  $w_n$ , exprimer les conditions précédentes sous forme matricielle.

b) Exprimer  $X_5$  en fonction de  $X_0$  et d'une puissance d'une matrice que l'on précisera.

c) En utilisant le résultat de la question 1-d, déterminer  $u_5, v_5$  et  $w_5$ .



Les deux parties sont indépendantes.

**-I-**  $\varphi$  est l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans lui-même, définie par  $\varphi(x, y) = (x+y, 2x)$ .

-1) -a- Montrer que  $\varphi$  est une application linéaire.

-b- Ecrire sa matrice  $M$  par rapport à la base canonique  $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1,2}$  de  $\mathbb{R}^2$ .

-c- Déterminer le noyau de  $\varphi$ . Quelle est sa dimension ?

-d- En déduire la dimension de l'image de  $\varphi$ . Sans calcul, qu'est  $\text{Im}(\varphi)$  ?

-2) -a- On considère la famille de vecteurs  $\mathcal{B}' = (\varepsilon_i)_{i=1,2}$  où  $\varepsilon_1 = (1, -2)$  et  $\varepsilon_2 = (1, 1)$ .  
Montrer que c'est une base de  $\mathbb{R}^2$ .

-b- Ecrire la matrice  $\Delta$  de  $\varphi$  par rapport à la base  $\mathcal{B}'$ .

-c- Ecrire la relation liant  $M$  et  $\Delta$ , utilisant une matrice inversible  $P$  et son inverse  $P^{-1}$  qu'on explicitera.

-d- Calculer  $M^{10}$  en utilisant  $\Delta$ .

**-II-** On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

-1) Calculer le déterminant de  $P$ . Montrer que  $P$  est inversible et calculer son inverse  $P^{-1}$ .

-2) -a- Vérifier le fait que le vecteur  $(1, -1, 1)$  est vecteur propre de  $A$ . Quelle valeur propre met-il en évidence ?

-b- Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .

-c- En déduire les valeurs propres de  $A$  et leurs ordres de multiplicité respectifs.

Avant toute recherche de vecteur propre, pour chaque sous-espace propre de  $A$ , dire quelles sont les valeurs possibles de sa dimension ?

Dans quel cas concernant ces dimensions,  $A$  est-elle diagonalisable ?

-d- Déterminer les sous-espaces propres de  $A$  et donner une base de chacun d'eux.

-e- Ecrire une relation matricielle liant  $A$ ,  $P$ , son inverse  $P^{-1}$  et une matrice diagonale  $\Delta$  qu'on explicitera.

-3) -a- Résoudre par la méthode de son choix, le système différentiel

$$\begin{cases} x_1' = -4x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ x_2' = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + e^{-t} \\ x_3' = -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + e^{-t} \end{cases} .$$

où  $x_1, x_2$  et  $x_3$  sont trois fonctions de variable  $t$ , dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

-b- Déterminer la solution telle que  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (1, 1, 1)$ .

Toutes les réponses doivent être argumentées.

**Exercice 1.** On considère les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$

$$F = \text{Vect}(\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}) \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$$

- Quelle est la forme générale des vecteurs de  $F$  ?
- Déterminer  $F \cap G$ . En donner une base.

**Exercice 2.** On considère le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $(\mathbb{R}_3[X], +, \cdot)$  des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels.

- Quelle est sa dimension ?
- On considère la famille  $\mathcal{A}$  composée des 3 polynômes suivants

$$P_1(X) = 1 + X^2 + X^3, \quad P_2(X) = 1 + X + 2X^2, \quad P_3(X) = 1 - X + 2X^3$$

- $\mathcal{A}$  est-elle génératrice de  $\mathbb{R}_3[X]$  ? (*Indication* : aucun calcul n'est nécessaire).
- $\mathcal{A}$  est-elle libre ?
- Donner une base du sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_3[X]$  engendré par  $\mathcal{A}$ .

**Exercice 3.** On pose  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

- Calculer la matrice  $A^2$ , et l'exprimer à l'aide des matrices  $A$  et  $I_3$ .
- En déduire que  $A$  est inversible, et exprimer  $A^{-1}$  à l'aide des matrices  $A$  et  $I_3$ .
- Expliciter les coefficients de  $A^{-1}$ .
- En déduire la solution du système d'équations

$$(S) \quad \begin{cases} -2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ -x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

**Exercice 4.** On considère l'application linéaire

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y, y + z) \end{cases}$$

- Déterminer le noyau et l'image de  $f$ , et en préciser les dimensions.
- On note  $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{C}' = \{e'_1, e'_2\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Déterminer la matrice de  $f$  relative à ces bases. On la note  $A$ .
- On note  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_1 - e_2 + e_3\}$  et  $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_1 + e'_2\}$ . En utilisant la définition de cette matrice, déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ .
- On pose  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $P' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
  - Montrer que  $P'$  est inversible et calculer  $P'^{-1}$ .
  - Calculer le produit  $P'^{-1}AP$ .
- Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^3})$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(id_{\mathbb{R}^2})$ .
  - Peut-on obtenir la matrice produit  $P'^{-1}AP$  sans faire les calculs de la question 4 ?

**-I-** On considère les matrices  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$  dans  $M_3(\mathbb{R})$ .

**-1)** Montrer que  $\mathbf{P}$  est inversible et calculer son inverse  $\mathbf{P}^{-1}$ .

**-2) -a-** Vérifier le fait que le vecteur  $(1, 0, 3)$  est vecteur propre de  $\mathbf{B}$ .  
Quelle valeur propre  $\alpha$  met-il en évidence ?

**-b-** Calculer le polynôme caractéristique de  $\mathbf{B}$ .

**-c-** En déduire les valeurs propres de  $\mathbf{B}$  et leurs ordres de multiplicité respectifs.

Avant toute recherche de vecteur propre, pour chaque sous-espace propre de  $\mathbf{B}$ , dire quelles sont les valeurs possibles de sa dimension ?

Dans quel cas concernant ces dimensions,  $\mathbf{B}$  est-elle diagonalisable ?

**-d-** Au vu des résultats du **-c-** et sans plus de calcul, qu'est le sous-espace propre  $\mathbf{E}_\alpha$  ?

**-e-** Pour la valeur propre  $\beta$  de  $\mathbf{B}$ , autre que  $\alpha$ , déterminer le sous-espace propre  $\mathbf{E}_\beta$  correspondant et en donner une base.

**-f-** Ecrire une relation matricielle liant  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{P}$ , son inverse  $\mathbf{P}^{-1}$  et une matrice diagonale  $\Delta$  qu'on explicitera.

**-3) -a-** Résoudre par la méthode de son choix, le système différentiel

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1' = -\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{1} \\ \mathbf{x}_2' = \mathbf{x}_2 + \mathbf{e}^t \\ \mathbf{x}_3' = -6\mathbf{x}_1 + 6\mathbf{x}_2 + 4\mathbf{x}_3 - 2\mathbf{e}^t \end{cases}$$

où  $x_1, x_2$  et  $x_3$  sont trois fonctions de variable  $t$ , dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

**-b-** Déterminer la solution telle que  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (-1, 1, -3)$ .

**-II-**  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_i)_{i=1,2,3}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

**-1) -a-**  $\varphi$  est l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par  $\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ ,  $\varphi(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3$  et  $\varphi(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ .  
Exprimer  $\varphi((x, y, z))$  pour tout  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$ .

**-b-** Déterminer le noyau  $\mathbf{Ker}(\varphi)$  et l'espace-image  $\mathbf{Im}(\varphi)$ .

Quelle est la situation relative de  $\mathbf{Im}(\varphi)$  et  $\mathbf{Ker}(\varphi)$  ?

$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ , quelle conclusion peut-on en déduire concernant le vecteur  $\varphi^2(\mathbf{u})$  ? (où  $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ )

-c- Ecrire la matrice  $C = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ . Vérifier matriciellement le résultat du -b-.

Qu'en déduire pour  $C^k$  lorsque  $k \geq 2$  ?

-2) A partir de la matrice  $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$  du -I- et de la matrice  $C$  du -c-, on définit  $A = B + C$ .

-a- Comparer  $B \times C$ ,  $C \times B$  et  $C$ .

-b- Montrer que  $\forall k \in \mathbf{N}$ ,  $B^k \times C = C$ .

-c- On rappelle la formule du binôme de Newton :  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $(b+c)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^{n-k} \cdot c^k$ .

Pourquoi peut-on l'appliquer au calcul de  $(B + C)^n$  ?

En déduire lorsque  $n \geq 1$ , une expression de  $A^n$  en fonction de  $B^n$ ,  $C$  et  $n$ .

-d- A l'aide de la relation matricielle obtenue au -I- -2) -f-, exprimer  $B^n$  puis  $A^n$  en fonction de  $n$ .

---

**Exercice 1 :** Soit  $B$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . On note  $\phi$  l'application linéaire définie par  $\phi(e_1) = e_3$ ,  $\phi(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$  et  $\phi(e_3) = e_3$ .

1. a) Ecrire la matrice  $M$  de  $\phi$  dans la base  $B$ .  
b) Déterminer le noyau de cette application.
2. On pose  $f_1 = e_1 - e_3$ ,  $f_2 = e_1 - e_2$ ,  $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$ .  
a) Montrer que les vecteurs  $f_1, f_2, f_3$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ . On appellera cette base  $B'$   
b) Calculer  $e_1, e_2, e_3$  en fonction de  $f_1, f_2, f_3$ .
3. a) Calculer  $\phi(f_1), \phi(f_2), \phi(f_3)$  en fonction de  $f_1, f_2, f_3$ .  
b) En déduire la matrice  $M'$  de  $\phi$  dans la base  $B'$ .
4. Quel rôle joue la matrice  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  pour les bases  $B$  et  $B'$ .  
b) Déduire des résultats de la question 2. la matrice  $Q^{-1}$ .  
c) Quelle relation lie les matrices  $M, M', Q$  et  $Q^{-1}$ ?

**Exercice 2 :** Soient les deux matrices  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ .
2. Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .
3. Trouver les valeurs propres de  $A$  et leur ordre de multiplicité.
4. Montrer que le vecteur  $V_1 = (-1, 1, 2)$  est une base de  $\text{Ker}(A + I)$
5. Trouver une base de  $\text{Ker}(A - I)$ . En déduire qu'il existe une matrice diagonale  $D$  que l'on explicitera, telle que  $A = PDP^{-1}$
6. Calculer  $D^2$ . En déduire  $A^2$ , puis l'expression de  $A^n$  suivant la parité de  $n$ .
7. Soit  $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ . Résoudre le système différentiel  $\frac{dX}{dt} = AX$ .
8. Déterminer la solution de ce système telle que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (X(t)) = (0, 0, 0)$  pour  $X(0) = (-2, 2, -4)$ .